Colle du 26 septembre: Développements asymptotiques

3.1 Première série

Exercice 1: Donner un équivalent de $f(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^t}$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 2:
1. Soit $a > 0$. Soit $u_0 > 0$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^a}$. Donner un équivalent de u_n.
2. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. Pour $R > 1$, soit $f(R)$ l'aire de $\{M | AM \leq R, BM \leq R\}$. Donner un équivalent de $f(R)$ quand $R \to 1^+$.

Exercice 3: Montrer que l'équation $x \sin x = c \cos x$ $(c > 0)$ admet une unique solution x_n dans $]n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

3.2 Deuxième série

Exercice 1: Calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^{\sin x} - 1}{x^x - 1}$.

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et F la primitive de f nulle en 0.
1. On suppose que $F(x) = x^2 + o(e^{-x})$ en $+\infty$. Que dire de f?
2. On suppose que $F(x) \sim x^a$ en $+\infty$ $(a > 0)$ et que f est croissante. Que dire de f?
3. On suppose que $F(x) = x^2 + o(x)$ quand $x \to +\infty$ et que f est croissante. Montrer que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$ en $+\infty$.

Exercice 3: Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $x_n^n + x_n^{n-1} + ... + x_n = 1$. Donner un développement asymtotique de x_n à trois termes.

3.3 Troisième série

Exercice 1: Calculer $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \arcsin(k/n^2)$.

Exercice 2: Montrer que, pour tout entier $n > 0$, l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n. Donner un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Exercice 3: Dans l'espace de dimension 3, soit $f(R)$ le nombre de points réticulaires contenus dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon R. Donner un équivalent de $f(R)$ quand $R \to +\infty$.

Exercice 4:
1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1, $l > 0$ et P un polynôme de degré n. On suppose que $f'(x)P(f(x))$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.
2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue, $l > 0$, n un entier naturel. On suppose que $h(x) \int_0^x h^n(t)dt$ tend vers l quand $x \to +\infty$. Donner un équivalent de h en $+\infty$.